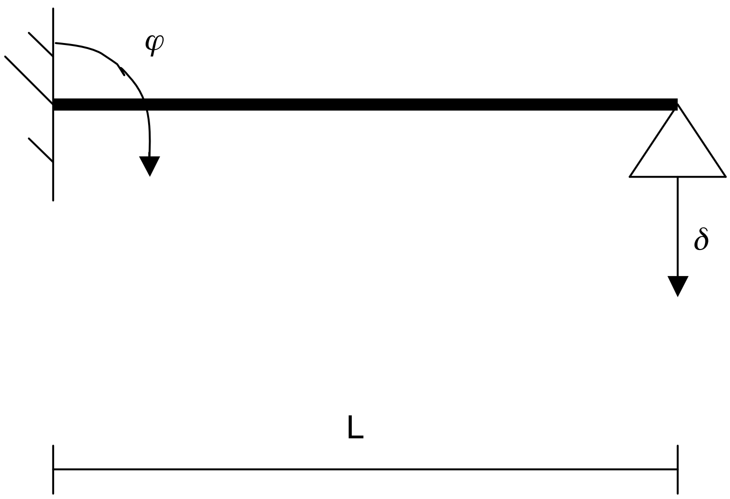
Esercizio con applicazione delle equazioni della linea elastica

Testo

Calcolare, per mezzo dell'equazione della linea elastica flessionale, i diagrammi delle sollecitazioni T ed M sull'asta lunga L (v. figura) indotte dai cedimenti vincolari: di rotazione all'incastro pari a $\varphi = \delta / L$; di abbassamento all'appoggio pari a δ.



Dati:	Lunghezza dell'asta	L	[mm]
	Modulo di Young dell'asta	E	[N/mm^2]
	Momento d'inerzia della sezione dell'asta	J	[mm^4]
	Area della sezione dell'asta	A	[mm^2]

con E, J, A constanti lungo L

Risoluzione:

Visto che i dati non sono esplicitati in numeri, l'esercizio andrà risolto lasciando indicate le lettere come dai dati.
Questo esercizio è risolvibile a mezzo delle equaizioni della linea elastica, che sono :

$E\ A\ u'' + p = 0$ equazione della linea elastica assiale

$E\ J\ v'''' - q = 0$ equazione della linea elastica flessionale

dove: gli spazi tra le lettere sottintendono (e sottointenderanno per tutta la risoluzione) moltiplicazione

"u" è lo spostamento orizzontale dell'asta (come da convenzione)

"v" è lo spostamento verticale dell'asta (come da convenzione)

gli apostrofi indicano il grado di derivazione (cioè v' ' signifca derivata seconda di v)

"p" è il carico assiale all'asta

"q" è il carico distribuito lungo l'asta (ortogonalmente alla direzione principale)

Siccome in questo esercizio non ci sono carichi, ne consegue che:

$E\ A\ u'' = 0$

$E\ J\ v'''' = 0$

Lasciando perdere la prima equazione (equazione della linea elastica assiale), dato che è proprio il testo del problema a dirci di considerare soltanto l'equazione della linea elastica flessionale, dalla SECONDA EQUAZIONE si ottiene:

$v'''' = 0$ (perchè E e J sono ovviamente diversi da zero) cioè

$v''' = c_1$ cioè

$v'' = c_1 z + c_2$ cioè

$v' = c_1 z^2/2 + c_2 z + c_3$ cioè

$\mathbf{v = c_1 z^3/6 + c_2 z^2/2 + c_3 z + c_4}$

che sono risultati ottenuti attraverso semplici integrazioni delle varie derivate di v in dz, dove z è l'ascissa della trave (cioè nel nostro caso è la direzione orizzontale).

Bisogna dunque trovare 4 condizioni al contorno per risolvere questa equazione (per trovare cioè la funzione v esplicitandone le costanti), come era logico aspettarsi, dato che l'ordine di derivazione di v iniziale era 4.

Bene, queste condizioni vanno ricercate nei vincoli e cedimenti di cui la trave è fornita e sono:

$v(0) = 0$

$v(L) = \delta$ (dato del problema, cioè lo spostamento verticale del tratto finale di asta è proprio pari al cedimento vincolare all'appoggio)

$v'(0) = -\varphi$ (sempre dato del problema, cioè la rotazione all'incastro è proprio uguale al cedimento rotazionale dell'incastro all'ascissa z=0)

$v''(L) = 0$ --->e qui potrebbero esserci dei dubbi, ma vediamo perchè posso scrivere questa equazione: essendo il vincolo in z=L un appoggio semplice, so che il momento in quel punto dovrà azzerarsi, dato che il vincolo di appoggio non è in grado di resistere a momenti flettenti;
ma siccome per l'equazione costitutiva di materiale elastico lineare so che M = E J k (dove k = curvatura) e so anche che per congruenza deve essere $k = \varphi' = -v''$, sostituendo v'' nella relazione costitutiva trovo che $M = -E\ J\ v''(L)$, cioè $v''(L) = -M / (EJ) = 0$ proprio perchè M all'ascissa z=L deve essere nullo.

Ed ecco quindi tutte le condizioni al contorno svelate !

Ora possiamo risolvere il problema:

dalla prima condizione al contorno trovo

$c_4 = 0$

dalla quarrta condizione al contorno trovo

$c_1 L = -c_2$

dalla terza condizione al contorno trovo

$c_3 = -\varphi$

e dalla seconda condizione al contorno trovo

$c_1 L^3 / 6 + c_2 L^2 / 2 + c_3 L = \delta$

Facendo qualche passaggio algebrico trovo

$-c_2 L^2 / 6 + c_2 L^2 / 2 - \varphi L = \delta$

ma ricordando che $\varphi = \delta / L$ (è un dato del problema), posso scrivere

$-c_2 L^2 / 6 + c_2 L^2 / 2 - \delta L / L = \delta$

cioè

$-c_2 L^2 / 6 + c_2 L^2 / 2 - \delta = \delta$

cioè

$c_2 L^2 / 3 = 2\delta$

cioè

$c_2 = 6\delta / L^2$

quindi

$c_1 = -6\delta / L^3$

Riassumendo, le condizioni al contorno sono :

$c_1 = - 6\delta / L^3$

$c_2 = 6\delta / L^2$

$c_3 = -\varphi = - \delta / L$

$c_4 = 0$

Visto che dobbiamo trovare i diagrammi di M e di T per l'asta in figura, dobbiamo servirci delle equazioni dei legami costitutivi, della congruenza, e di equilibrio; queste equzioni "mescolate" danno:

M = - EJv‘ ‘

T = M ‘ = -EJv‘ ‘ ‘ (grazie al fatto che E e J sono costanti lungo z)

Dunque ho bisogno di conoscere le equazioni v‘ ‘ e v‘ ‘ ‘.

Visto che so che

$v''' = c_1$

e visto che conosco c_1 posso scrivere

$v''' = - 6\delta / L^3$

Dunque trovo che il taglio lungo z ha questa espressione:

$T = -EJ(- 6\delta / L^3)$

Inoltre, dato che

$v'' = c_1 z + c_2$

$v'' = - 6\delta z / L^3 + 6\delta / L^2$

Trovo che

$M = -EJ(- 6\delta z / L^3 + 6\delta / L^2)$

La *SOLUZIONE* del problema è dunque:

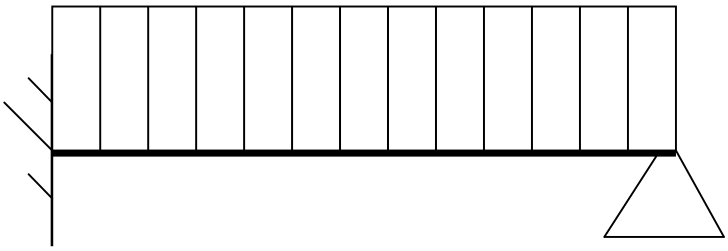
$T = 6 E J \delta / L$

$M = - 6 E J \delta (L - z) / L^3$

I *DIAGRAMMI* saranno quindi :

costante, positivo per il taglio (visto che i dati che figurano nella sua equazione sono in realtà dei numeri, cioè costanti), difatti nella sua espressione non figura z;

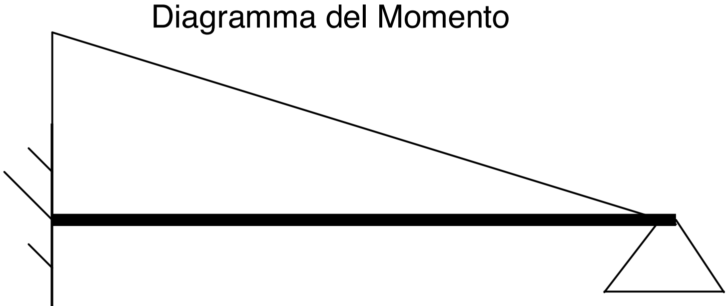
Diagramma del Taglio



$T = cost = + 6 E J \delta / L$

lineare (perchè la z vi compare con esponente 1, cioè è l'equazione di una retta), negativo (quindi disegnato sopra la trave, per la convenzione secondo la quale il momento si disegna dalla parte delle fibre tese) per il momento:
in $z=0$ varrà $M = - 6 E J \delta / L^2$ e poi scenderà linearmente fino ad arrivare a zero (perchè quando $z=L$, tra parentesi si ha $L-L=0$) all'appoggio (come effettivamente deve essere, dato che l'appoggio non reagisce a momento).

Diagramma del Momento



$M(0) = - 6 E J \delta / L^2$ $M(L) = 0$

NOTE aggiuntive (se siete stanchi non leggetele, ma sappiate che contengono interessanti riflessioni !!!!!)

NOTA 1

Se avessimo voluto esprimere il risultato in funzione di φ avremmo trovato:

T = 6 E J φ

M = - 6 E J φ (L - z) / L^2

NOTA 2

Notare che facendo una analisi dimensionale del T che abbiamo trovato, si vede che T ha le dimensioni di una forza, quindi il risultato è formalmente corretto; inoltre si trova che M ha le dimensioni di una forza moltiplicata per una lunghezza, cioè ha le dimensioni di un momento, come è giusto che sia.

Ciò NON significa che il risultato sia necessariamente corretto, ma se non avessimo avuto un riscontro dall'analisi dimensionale, questo ci avrebbe dato la sicurezza della presenza di un errore.

NOTA 3

Si vede che se φ è grande (cioè se δ è grande e L è piccolo), anche le sollecitazioni sono grandi

NOTA 4 (LA PIU' IMPORTANTE)

Se la rigidezza flessionale (EJ) della trave è elevata, anche le sollecitazioni sono elevate e da qui la famosa frase "una trave IPERSTATICA, più è rigida, più si sollecita".

Ho sottolineato la parola "iperstatica" perchè volevo introdurre un concetto non affrontato prima nell'esercizio:

provate a pensare a cosa sarebbe successo se la trave fosse stata isostatica, e precisamente con una cerniera in luogo dell'incastro, e un appoggio a z=L uguale a quello del nostro esercizio;

QUALI SAREBBERO STATI ALLORA I DIAGRAMMI DI M E DI T DOVUTI ALLO STESSO TIPO DI CEDIMENTI, SU UN'ASTA DI RIGIDEZZA FLESSIONALE (EJ) QUALSIASI ???

Inviatemi una mail a royalstaff@alice.it con la risposta e vi dirò se è corretta !

Buon divertimento.

Saluti

Cheers !